§ 子空间的运算

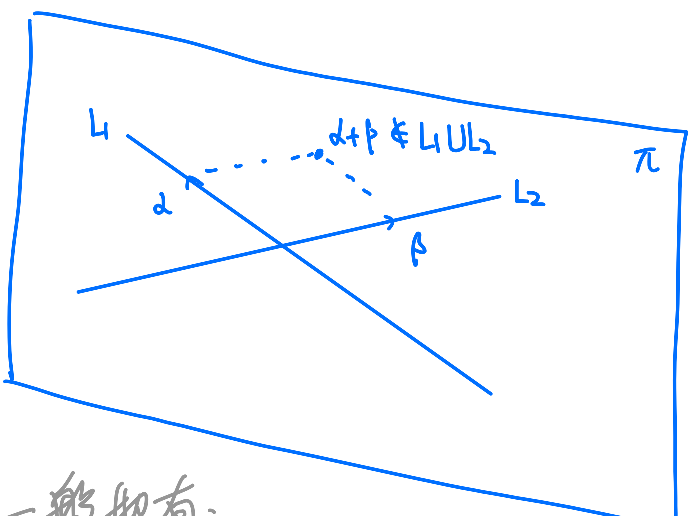
如何从已有的子空间构造新的子空间

子空间的交仍然是子空间

定理： 设 $W_i\ (i\in I)$ 为 V 的子空间，则 $\bigcap_{i\in I} W_i$ 也为 V 的子空间。
特别地，设 W_1, W_2 为 V 的子空间，则 $W_1\cap W_2$ 也为 V 的子空间。

证：$\alpha,\beta\in\bigcap_{i\in I}W_i \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta\in W_i\ (\forall i\in I) \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta\in\bigcap_{i\in I}W_i$ ▫

$W_1\cup W_2$?



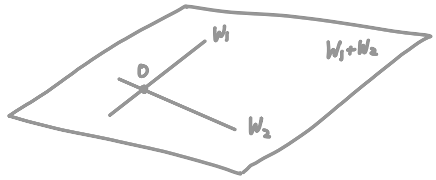
π 为包含 $L_1\cup L_2$ 的最小的子空间

一般地有：

定理： 设 W_1, W_2 为 V 的子空间，则 W_1 与 W_2 的和

$$W_1+W_2 := \{\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in W_1,\ \alpha_2\in W_2\}$$

构成 V 的子空间，并且是包含 $W_1\cup W_2$ 的最小子空间。



类似地

$W_1+W_2+\cdots+W_n := \{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \mid \alpha_i \in W_i \quad i=1,\cdots,m\}$

证: $\lambda(\alpha_1+\alpha_2)+\mu(\beta_1+\beta_2) = (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)+(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2) \in W_1+W_2$

$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1+W_2$ ✓, 反之 $\forall\ W_1\cup W_2 \subset W \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 \in W \Rightarrow W_1+W_2 \subseteq W$. □

定理: $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle + \langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle = \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle$

定理(维数公式): $W_1, W_2 \subseteq V$ 子空间. 则

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2)$$

证: $\dim W_1 = r$, $\dim W_2 = s$, $\dim(W_1\cap W_2) = t$.

$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 为 $W_1\cap W_2$ 的基.

$\alpha_1,\cdots,\alpha_t \xrightarrow{扩充} \alpha_1,\cdots\alpha_t, \beta_1,\cdots\beta_{r-t}$ 为 W_1 的基

$\alpha_1,\cdots,\alpha_t \xrightarrow{扩充} \alpha_1,\cdots\alpha_t, \gamma_1,\cdots\gamma_{s-t}$ 为 W_2 的基

$\Rightarrow W_1+W_2 = \langle\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t},\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t}\rangle$

以下仅需证明: $\alpha_1,\cdots\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t},\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t}$ 线性无关.

设 $\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{r-t}\mu_i\beta_i + \sum_{i=1}^{s-t}\nu_i\gamma_i = 0$ 则

$$\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{r-t}\mu_i\beta_i = -\sum_{i=1}^{s-t}\nu_i\gamma_i \in W_1\cap W_2$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^{s-t} \nu_i \gamma_i = \sum_{i=1}^{t} \delta_i \alpha_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \delta_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{s-t} \nu_i \gamma_i = 0$$

$$\Rightarrow \nu_i = 0 \quad i=1,\cdots,s-t.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{r-t} \mu_i \beta_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_i = 0 & i=1,\cdots,t \\ \mu_i = 0, & i=1,\cdots,r-t. \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_{r-t},\gamma_1,\cdots,\gamma_{s-t}\}$ 线性无关.

推论：(1) $\dim(W_1+W_2) \leqslant \dim(W_1) + \dim(W_2)$

(2) $\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(3) $\dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim W_1 + \dim W_2 - \dim V$.

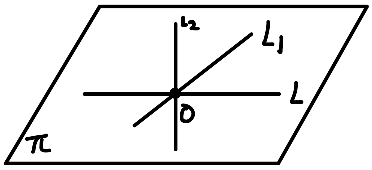
特别地，若 $\dim W_1 + \dim W_2 > \dim V$，则 $W_1 \cap W_2 \neq 0$.

定义：设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 若 $\forall \alpha \in W_1+W_2$ 可**唯一**的写成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_1 \in W_1,\ \alpha_2 \in W_2$$

则称 W_1+W_2 为直和 记为 $W_1 \oplus W_2$.

若 $V = W_1 \oplus W_2$，则称 W_1 为 W_2 的补空间

例  . $\pi = L\oplus L_1 = L \oplus L_2$

$\Rightarrow$ 补空间不唯一!

如何构造一个补空间? 扩充基 (习题)

定理: 设 W_1, W_2 为 V 的子空间. 则以下等价.

1) $W_1 + W_2$ 为直和

2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

3) $\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$

4) $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 为 W_1 的基, $\beta_1 \cdots \beta_s$ 为 W_2 的基, 则 $\alpha_1 \cdots \alpha_r, \beta_1 \cdots \beta_s$ 为 W_1+W_2 的基.

证: $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$

例: $F^{n\times n}$ = {对称矩阵} $\oplus$ {反对称矩阵}.

例: $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n \,\middle|\, x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$ $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n \,\middle|\, x_1 = x_2 = \cdots = x_n \right\}$

则 $F^n = W_1 \oplus W_2$

例: $S = \{ f(x) \in F_n[x] \mid f(-x) = f(x) \}$

$K = \{ f(x) \in F_n[x] \mid f(-x) = -f(x) \}$

④ 则 $F_n[x] = S \oplus K$

复习：

判断线性相关性，计算秩与寻找极大线性无关组

齐次方程组基础解系与解空间维数

空间的基与维数，过渡矩阵及坐标变换式

例：若向量组 $b_1,\cdots,b_s$ 可由线性无关的向量组 $a_1,\cdots,a_r$ 线性表示，即

$$(b_1,\cdots,b_s)=(a_1,\cdots a_r)\,C$$

其中 $C=(c_{ij})_{r\times s}$，则 $\operatorname{rank}(b_1,\cdots,b_s)=\operatorname{rank}C$. 特别地，若 $r=s$，则 $b_1,\cdots,b_s$ 线性无关当且仅当 $|C|\neq 0$.

证：记 $c_j=\begin{pmatrix}c_{1j}\\ \vdots\\ c_{rj}\end{pmatrix}$ 则 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_s)$

$$(b_1,\cdots,b_s)=(a_1,\cdots a_r)\,C$$

$$\Rightarrow\ b_j=(a_1,\cdots,a_r)\,c_j$$

$$\Rightarrow\ (b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_l})=(a_1,\cdots,a_r)(c_{i_1},\cdots c_{i_l})$$

$$\forall\ 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_l\leq s.$$

因此 $(b_{i_1}\cdots b_{i_l})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (a_1,\cdots,a_r)(c_{i_1}\cdots c_{i_l})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}=0$

$$\xLeftrightarrow{a_1\cdots a_r\text{ 线性无关}}\ (c_{i_1},\cdots,c_{i_l})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}=0$$

$b_{i_1}\cdots b_{i_\ell}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $c_{i_1},\cdots,c_{i_\ell}$ 线性相关. 从而我们有

$$\operatorname{rank}(b_1,\cdots,b_s)=\operatorname{rank}(c_1,\cdots,c_s)=\operatorname{rank}C.\ \square$$

注：通过选择基，可将向量组的相关性转换成它们坐标的相关性.

例 若 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ 不能由 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}$ 线性表示.

(1) 求 a

(2) 求 T s.t. $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T$

解 (1) $A:=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in F^{3\times3}$　$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=1\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \text{ 为 } F^3 \text{ 的一组基.}\\ \langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle \not\subseteq \langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle\end{array}\right\}\Rightarrow \langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle\neq F^3$

$\Rightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{pmatrix}=0\Rightarrow a=5$

(2) $T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{变换}]{\text{行初等}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}2&1&5\\4&2&10\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

例：设 $a_1=(2,1,2,2,-4)$, $a_2=(1,1,-1,0,2)$, $a_3=(0,1,2,1,-1)$

$a_4=(-1,-1,-1,-1,1)$, $a_5=(1,2,1,1,1)$. 试确定 $a_1,\cdots,a_5$

的秩和一个极大无关组.

解：$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{变换}]{\text{行初等}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ rank$=3$ & a_1, a_2, a_3 为极大无关组.

(1) 若向量组的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=3$, 而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_5)=4$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5)=$________.

(2) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=4$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1)=$ ________.

(3) 向量组 $(1,-1,2,4)$, $(0,3,1,2)$, $(3,0,7,14)$, $(1,-2,2,0)$, $(2,1,5,10)$ 的秩为________.

(4) 已知向量组 $\boldsymbol{a}_1=(2,-1,3,0)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,2,0,-2)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,-8,6,6)$, $\boldsymbol{a}_4=(4,3,3,\lambda)$, 若向量组的秩为 2, 则 $\lambda=$________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_9 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_9 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_9b_1 & a_9b_2 & \cdots & a_9b_9 \end{pmatrix}$, $a_i\neq 0$, $b_i\neq 0\,(i=1,2,\cdots,9)$, 则 $\operatorname{rank}(A)=$ ________.

(6) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关, 向量 $\boldsymbol{b}_1$ 可以用它们线性表示, 向量 $\boldsymbol{b}_2$ 不能用它们线性表示, 则向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\lambda\boldsymbol{b}_1+\mu\boldsymbol{b}_2$ 线性无关的充要条件是复数 λ________, 且 μ________.

(7) 设向量 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,1,3,5)$, $\boldsymbol{a}_3=(1,-1,\lambda+2,1)$, $\boldsymbol{a}_4=(1,2,4,\lambda+8)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,\mu+3,5)$. 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能被向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_4$ 线性表示的充要条件是复数 λ________, μ________.

(8) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)$ 线性表示, 但是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 则 $a=$________.

(9) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)$, $\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)$, $\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)$ 有相同的秩, 且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 则 $a=$________, $b=$________.

(1) 已知 $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(15,25,20,14)$, $2\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}=(-19,-22,-6,-10)$, 则 $\boldsymbol{a}=$ ________, $\boldsymbol{b}=$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2/2,\boldsymbol{a}_3/3$ 到基 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$ 的过渡矩阵为 ________.

(3) 在 $\mathbf{R}^4$ 中, $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,5)$, $\boldsymbol{a}_2=(5,-1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,-1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_4=(-1,3,1,11)$, 则由这 4 个向量生成的子空间的维数为 $\lambda=$ ________.

(4) 若向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{a}_1=(1,-2,0)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_3=(0,1,-2)$ 下的坐标是 $(1,3,2)$, 则 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{b}_1=(1,0,1)$, $\boldsymbol{b}_2=(1,1,-1)$, $\boldsymbol{b}_3=(0,1,0)$ 下的坐标是 ________.

(5) 向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,\cdots,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,\cdots,1,0),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=(1,0,\cdots,0)$ 下的坐标是 ________.

(6) 向量 $(5,1,-1,-3)$ 在基 $(-1,1,1,1)$, $(1,-1,1,1)$, $(1,1,-1,1)$, $(1,1,1,-1)$ 下的坐标是 ________.

(7) 多项式 x^2+x+1 在 $\mathbf{R}_2[x]$ 的基 $1,x+1,(x+1)^2$ 下的坐标是 ________.

(8) 将 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ 看成一个有 n 项的数列. $\mathbf{R}^n$ 中所有的等差数列的全体, 对向量的加法及数与向量的乘法运算, 构成一个线性子空间. 若 $n=2\,012$, 则该子空间的维数为 ________.

(9) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维向量空间的一组基, 而 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的另外一组基. 则在这两组基下具有相同坐标的向量构成的向量空间的维数为 ________.

(1) 若三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 并且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\3&0&\lambda\end{pmatrix}$, 则 $\lambda=$ ________.

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&\lambda&-3\\1&2&\mu\end{pmatrix}$, 而向量 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{a}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 构成了线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 则 $\lambda=$ ________, $\mu=$ ________.

(3) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 0, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 ________.

(4) 若方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times4}$ 满足 $|\boldsymbol{A}|=0$, 且元素 a_{23} 的代数余子式 A_{23} 非零, 则

8

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中的向量的个数是 ________.

(5) 若齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{a}_1=(1,3,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2=(1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$, 而齐次方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{b}_1=(1,2,-1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}_2=(0,3,1,k)^{\mathrm{T}}$, 且两个方程组有非零公共解, 则参数 $k=$ ________.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶复方阵, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=2$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则齐次方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数是________.

(7) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r$, 则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$ 的取值范围为________.